Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
3^{er} Examen Parcial (38 %)
Ene-Mar 2018

Turno 7-8
Duración: 1 hora 50 minutos

RESPUESTAS

Pregunta 1. (6 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-\cos(x)}{\operatorname{senh}^2(2x)}$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-\cos(x)}{\operatorname{senh}^2(2x)} &\overset{\substack{\text{L'H}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}6x+\operatorname{sen}(x)}{4\operatorname{senh}(2x)\cosh(2x)}\\ &= \frac{1}{4}\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cosh(2x)}\right)}_{=1}\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}6x+\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{senh}(2x)}\right)\\ &\overset{\substack{\text{L'H}\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{6\,e^{3x^2}(6x^2+1)+\cos(x)}{2\cosh(2x)} = 7/8\end{aligned}$$

Pregunta 2. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int\frac{\left(2^x-2^{-x}\right)^3}{\left(2^x+2^{-x}\right)^4}\,\mathrm{d}x$

Solución:

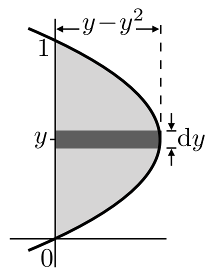
$$\begin{aligned}\int\frac{\left(2^x-2^{-x}\right)^3}{\left(2^x+2^{-x}\right)^4}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{\left(e^{x\ln(2)}-e^{-x\ln(2)}\right)^3}{\left(e^{x\ln(2)}+e^{-x\ln(2)}\right)^4}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\ln(2)}\int\left(\frac{e^{x\ln(2)}-e^{-x\ln(2)}}{2}\right)^3\left(\frac{2}{e^{x\ln(2)}+e^{-x\ln(2)}}\right)^4\ln(2)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\ln(2)}\int\frac{\operatorname{senh}^3\big(x\ln(2)\big)}{\cosh^4\big(x\ln(2)\big)}\ln(2)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\ln(2)}\int\frac{\cosh^2\big(x\ln(2)\big)-1}{\cosh^4\big(x\ln(2)\big)}\operatorname{senh}\big(x\ln(2)\big)\ln(2)\,\mathrm{d}x\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \cosh(x\ln(2))=u\\ \operatorname{senh}(x\ln(2))\ln(2)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u}}{=} \frac{1}{2\ln(2)}\int\frac{u^2-1}{u^4}\mathrm{d}u=\frac{1}{2\ln(2)}\left(-u^{-1}+\frac{1}{3}u^{-3}\right)+C\\ &= \frac{-1}{2\ln(2)}\left(\operatorname{sech}\big(x\ln(x)\big)-\frac{1}{3}\operatorname{sech}\big(x\ln(x)\big)\right)+C\end{aligned}$$

para cualquier valor de $C\in\mathbb{R}$.

Pregunta 3. Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante acotada por la curva de ecuación $x = y - y^2$.

a. (4 ptos.) Halle el área de $\mathcal{R}$

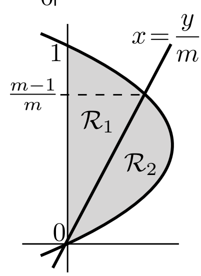
b. (4 ptos.) Para cada $m > 0$, la recta $y = mx$ divide a $\mathcal{R}$ en dos regiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, siendo $\mathcal{R}_1$ la región que contiene al punto $(0, 1)$. Halle el valor de m tal que el área de $\mathcal{R}_1$ sea igual al área de $\mathcal{R}_2$.



Solución: El área de la región $\mathcal{R}$ viene dada por

$$\int_0^1 \left(y - y^2\right) \mathrm{d}y = {}^1\!/_6$$

La recta $y = mx$, con $m > 0$, intersecta a la parábola $x = y - y^2$ en los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{m-1}{m^2}, \frac{m-1}{m}\right)$, ya que



$$\frac{y}{m} = y - y^2 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\text{ o }\; y = \frac{m-1}{m}$$

El área de la región $\mathcal{R}_1$ viene dada por

$$\int_0^{\frac{m-1}{m}} \frac{y}{m}\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{m-1}{m}}^1 \left(y - y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{1 - 3m + 3m^2}{6m^3}$$

y el área de la región $\mathcal{R}_2$ viene dada por

$$\int_0^{\frac{m-1}{m}} \left(y - y^2 - \frac{y}{m}\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^3$$

Como el área total vale ${}^1\!/_6$ y las áreas de las regiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ deben ser iguales, entonces el área de la región $\mathcal{R}_2$ debe ser igual a ${}^1\!/_{12}$. Luego,

$$\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^3 = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} - 1}$$

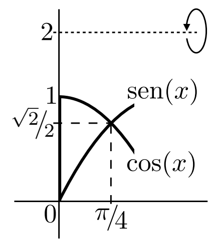
Pregunta 4. Considere la región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, el eje y y la recta vertical $x = \pi/4$. Sea S el sólido que se genera al hacer rotar esta región alrededor de la recta $y = 2$.

a. (4 ptos.) Exprese el volumen del sólido S mediante el método de arandelas.

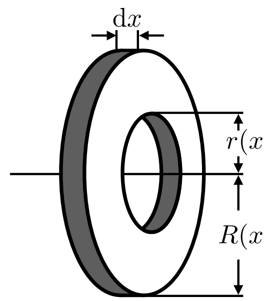
b. (4 ptos.) Exprese el volumen del sólido S mediante el método de cascarones.

c. (2 ptos.) Calcule el volumen del sólido S.

Solución: La región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, el eje y y la recta vertical $x = \pi/4$ está ilustrada en la figura a la derecha.



Para expresar el volumen mediante el método de arandelas hacemos cortes transversales. Para cada x entre 0 y $\pi/4$ el diferencial de volumen viene dado por



$$\mathrm{d}V = \pi\Big(\big(R(x)\big)^2 - \big(r(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x$$

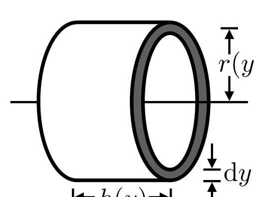
donde

$$r(x) = 2 - \cos(x) \quad \text{y} \quad R(x) = 2 - \operatorname{sen}(x)$$

Así, el volumen viene dado por

$$\pi\int_0^{\pi/4}\Big(\big(2 - \operatorname{sen}(x)\big)^2 - \big(2 - \cos(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x$$

Para expresar el volumen mediante el método de cascarones hacemos cortes coaxiales. Para cada y entre 0 y 1 el diferencial de volumen viene dado por



$$\mathrm{d}V = 2\pi\, r(y)\, h(y)\,\mathrm{d}y$$

donde

$$r(y) = 2 - y \quad \text{y} \quad h(y) = \begin{cases} \arccos(y) & , \text{ si } y \in \left[\sqrt{2}/2, 1\right] \\ \operatorname{arcsen}(y) & , \text{ si } y \in \left[0, \sqrt{2}/2\right] \end{cases}$$

Así, el volumen viene dado por

$$2\pi \int_{0}^{\sqrt{2}/2} \Big((2-y)\big(\operatorname{arcsen}(y)\big)\Big)\,\mathrm{d}y + 2\pi \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \Big((2-y)\big(\arccos(y)\big)\Big)\,\mathrm{d}y$$

Finalmente, el volumen de sólido S es $\pi\big(4\sqrt{2} - 9/2\big)$.

Pregunta 5. (6 ptos.) Determine si la integral impropia $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{3x + \sqrt{x}}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ es convergente.

Solución: Como $0 < \dfrac{3}{x} < \dfrac{3}{\ln(x)} = \dfrac{3x}{x\ln(x)} < \dfrac{3x + \sqrt{x}}{x\ln(x)}$ para todo $x \in [3, \infty)$ y $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge, pues $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge ya que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge dado que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ diverge para $p \leq 1$, el Criterio de Comparación establece que $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{3x + \sqrt{x}}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ también diverge.